Abril-Julio 2018

Solución Parcial 3 (35 %) MA1112

Pregunta 1 (6 Pts)

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sinh(x))^{x^2}$$

Solución

Haciendo la sustitución ingenua (S.I.) obtenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} (\sinh(x))^{x^2} = [0^0]$$

El cual es una indeterminación del tipo exponencial. Así que aplicamos logaritmo natural y exponencial antes de tomar el límite de modo que queda:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left((\sinh x)^{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{(x^2 \ln(\sinh x))} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(\sinh x)}{\frac{1}{x^2}}\right]}$$

Donde la última igualdad es consecuencia de la continuidad de la función exponencial. Ahora, trabajaremos con el límite, cuya sustitución ingenua conlleva a una indeterminación del tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$. Así que aplicamos la regla de L'Hopital, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(\sinh x)}{\frac{1}{x^2}}\right] &= \lim\left[\frac{\frac{\cosh x}{\sinh x}}{\frac{-2}{x^3}}\right] \\
&= \lim\left[\frac{-x^3\cosh x}{2\sinh x}\right] \quad \text{(La S.I. da } [\tfrac{0}{0}]\text{, aplicamos L'H de nuevo)} \\
&= \lim\left[\frac{-3x^2\cosh x - x^3\sinh x}{2\cosh x}\right] \quad \text{(Haciendo S.I.)} \\
&= \frac{0-0}{2} = 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo arriba, obtenemos finalmente que

$$\lim_{x\to 0^+} (\sinh(x))^{x^2} = e^0 = \boxed{1}$$

Pregunta 2 (6 Pts)

Determine la convergencia o divergencia de la siguiente integral:

$$\int_1^\infty \frac{2e^{-x^2}\ln x}{1+e^{-x^2}}\,dx$$

Solución

Primero observemos que como $x \geq 1$, se cumple la desigualdad $\ln x < x$. Y como $\frac{2e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}$ es un número positivo, se cumple que $\dfrac{2e^{-x^2}(\ln x)}{1+e^{-x^2}} < \dfrac{2e^{-x^2}(x)}{1+e^{-x^2}}$. Luego,

$$\int_1^\infty \frac{2e^{-x^2}\ln x}{1+e^{-x^2}}dx < \int_1^\infty \frac{2xe^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}dx$$

Resolvemos la integral impropia de la derecha:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{2xe^{-x^2}dx}{1+e^{-x^2}} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{2xe^{-x^2}dx}{1+e^{-x^2}} \quad \text{(Notando que la derivada del denominador es casi el numerador)}\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\ln|1+e^{-x^2}|\right]_1^b\\
&= -\lim_{b\to\infty}\left[(\ln|1+e^{-b^2}|)-(\ln|1+e^{-1}|)\right] \quad \text{(Haciendo S.I)}\\
&= -\left[(\ln|1+\cancel{e^{-\infty}}|)-(\ln|1+e^{-1}|)\right]\\
&= -\cancel{\ln 1}+\ln(1+e^{-1}) = \ln(1+e^{-1}) \quad \text{(Converge)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el criterio de comparación para la convergencia de integrales impropias, como la integral $\int_1^\infty \frac{2xe^{-x^2}dx}{1+e^{-x^2}}$ converge, entonces la integral $\int_1^\infty \frac{2e^{-x^2}\ln x}{1+e^{-x^2}}dx$ también $\boxed{\text{converge}}$.

Pregunta 3

Sea R la región acotada por las funciones $y = 2-|x-1|$ y $y = |x-1|$.

a) **(6 Pts)** Calcule el área de la región R.

b) Exprese la integral que representa el volumen del sólido generado al hacer girar la región R en torno a:

   b_1) **(4 Pts)** El eje X

   b_2) **(4 Pts)** El eje Y

Solución

a) Primero hallamos los puntos en donde las funciones se intersecan. Para ello, igualamos $y = 2-|x-1|$ con $y = |x-1|$. Resultando $2-|x-1| = |x-1|$. Despejando el valor absoluto obtenemos: $|x-1| = 1$. Luego, $x-1 = \pm 1$, y $x = 1 \pm 1$. Entonces, las funciones se cruzan cuando $x = 0$ y $x = 2$.

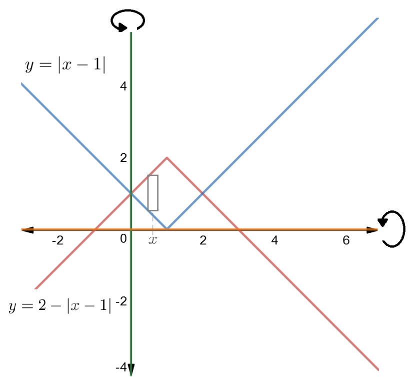

Figura 1: Pregunta 3

Para calcular el área, observamos en la figura 1 que la función $y = 2-|x-1|$ es siempre mayor o igual que $y = |x-1|$ en el intervalo $[0,2]$. Así, podemos determinar el área por medio de la integral:

$$A(R) = \int_0^2 [(2-|x-1|)-(|x-1|)]dx = 2\int_0^2 (1-|x-1|)dx$$

Para resolver esta integral debemos notar que la función $|x-1| = 1-x$ si $x \in [0,1]$ y que $|x-1| = x-1$ si $x \in (1,2]$. Es por esta razón que debemos partir nuestra integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A(R) &= 2\int_0^2 (1-|x-1|)dx \\
&= 2\left[\int_0^1 (1-|x-1|)dx + \int_1^2 (1-|x-1|)dx\right] \\
&= 2\left[\int_0^1 (1-(1-x))dx + \int_1^2 (1-(x-1))dx\right] \\
&= 2\left[\int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x)dx\right] \\
&= 2\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2\right] \\
&= 2\left[(\tfrac{1}{2}-0) + ((4-2)-(2-\tfrac{1}{2}))\right] \\
&= 2\left[\tfrac{1}{2}+2-2+\tfrac{1}{2}\right] \\
&= 2(1) = \boxed{2}
\end{aligned}$$

b) Veamos cada caso:
b_1) La región R gira en torno al eje X. Utilizamos el método de arandelas. Para un x fijo en el intervalo $[0,2]$, tendríamos que $R(x)$ es la longitud del radio mayor. Esto es, $R(x) = (2-|x-1|)-(0) = 2-|x-1|$. Mientras

que $r(x)$ sería la longitud del radio menor, de modo que sería $r(x) = (|x-1|) - (0) = |x-1|$. Así, la fórmula que representa el volumen del sólido de revolución es:

$$\pi \int_0^2 [R^2(x) - r^2(x)]dx = \pi \int_0^2 [(2-|x-1|)^2 - (|x-1|)^2]dx = \boxed{4\pi \int_0^2 (1-|x-1|)dx}$$

b_2) La región R gira en torno al eje Y. Utilizamos el método de cascarones cilíndricos. Para un x fijo en el intervalo $[0,2]$, tendríamos que $r(x)$ es la distancia del rectángulo representativo al eje de rotación. Esto es, $r(x) = (x) - (0) = x$. Mientras que $h(x)$ sería la altura de este rectángulo, de modo que $h(x) = (2-|x-1|) - (|x-1|) = 2(1-|x-1|)$. Así la fórmula que representa el volumen del sólido de revolución es:

$$2\pi \int_0^2 r(x)h(x)dx = 2\pi \int_0^2 (x)2(1-|x-1|)dx = \boxed{4\pi \int_0^2 x(1-|x-1|)dx}$$

Pregunta 4 (5 Pts)

La base de un sólido es la región R acotada por las rectas $y = x$, $y+x = 2$ y el eje X. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje Y son semicírculos con el diámetro sobre R.

Solución

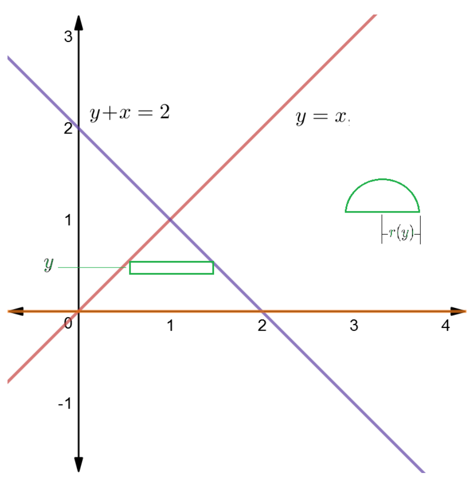

Figura 2: Pregunta 4

Primero, notemos que la base del sólido es un triángulo con vértices en los puntos $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$, donde este último punto es la intersección de las rectas $y = x$ y $y + x = 2$. Luego, como las secciones transversales son perpendiculares al eje Y, la integral que represente el volumen del sólido será con respecto a y, y tendrá los límites de integración desde cero hasta uno. Es decir,

$$V = \int_0^1 A(y)dy$$

Para determinar $A(y)$, recordemos que el área de un semicírculo de radio r es $\frac{\pi r^2}{2}$. Así, para un y fijo en el intervalo $[0,1]$, el área de la sección transversal es $A(y) = \frac{\pi r^2(y)}{2}$, con $r(y)$ el radio del semicírculo en el valor de y. Luego, dado que la longitud del rectángulo representativo horizontal es el diámetro del semicírculo, entonces el radio $r(y)$ es la mitad de dicha longitud; esto es:

$$r(y) = \frac{1}{2}((2-y)-(y)) = \frac{1}{2}(2-2y) = 1-y$$

Sustituyendo en la integral, tenemos que el volumen del sólido es:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 A(y)dy \\
&= \int_0^1 \tfrac{\pi r^2(y)}{2}dy \\
&= \tfrac{\pi}{2}\int_0^1 (1-y)^2dy \\
&= \tfrac{\pi}{2}\int_0^1 (1-2y+y^2)dy \\
&= \tfrac{\pi}{2}\left[y - y^2 + \tfrac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{\pi}{2}\left((1-1+\tfrac{1}{3})-(0)\right) \\
&= \tfrac{\pi}{2}(\tfrac{1}{3}) = \boxed{\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Pregunta 5 (4 Pts)

Encuentre la longitud de arco de la curva $y = n\cosh(\frac{x}{n})$ en el intervalo $[0,n]$, con $n \in \mathbb{N}$.

Solución

La fórmula para la longitud de una curva en nuestro caso viene dada por

$$L = \int_0^n \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Donde $f(x) = n\cosh(\frac{x}{n})$. Entonces, $f'(x) = \sinh(\frac{x}{n})$, y $[f'(x)]^2 = \sinh^2(\frac{x}{n})$. Luego, por la identidad fundamental para funciones hiperbólicas, $\cosh^2() - \sinh^2() = 1$, se deduce que $1 + [f'(x)]^2 = 1 + \sinh^2(\frac{x}{n}) = \cosh^2(\frac{x}{n})$. Entonces $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \cosh(\frac{x}{n})$.

Así, la fórmula para la longitud de la curva en el intervalo $[0, n]$ queda:

$$L = \int_0^n \cosh\left(\frac{x}{n}\right) dx = \left[n \sinh\left(\frac{x}{n}\right)\right]_0^n = n\sinh(1) = \boxed{\frac{n(e - e^{-1})}{2}}$$